EXERCICE 4 **7 points**

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ la fonction g par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où ln désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0~;~+\infty[= I$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $\left(x^2 - 2x + 2\right)$.
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0{,}5~;~1]$, que l'on notera α.

4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[=I$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[=I$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^x\ln x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que :

pour tout nombre réel $x>0$, $f'(x)=\mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x>0$, on a : $f''(x)=\mathrm{e}^x\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\ln x\right)$.

2. On pourra remarquer que pour tout réel $x>0$, $f''(x)=\mathrm{e}^x\times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la partie A.

3. **a.** Dresser le tableau de signes de la fonction f'' sur $]0\,;\,+\infty[$. Justifier.

b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A.

c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Justifier.

4. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que $f'(\alpha)=\dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha)$.

On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$.

c. Démontrer que $f'(\alpha)>0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.